

## 矩形板の複合非線形解析

森 田 千 尋\*・崎 山 毅\*  
松 田 浩\*Geometrical and Material Nonlinear  
Analysis of Rectangular Plate

by

Chihiro MORITA\*, Takeshi SAKIYAMA\*  
and Hiroshi MATSUDA\*

In this paper, an approximate method for analyzing the geometrical and material nonlinear problems of rectangular plates is proposed. The solutions of partial differential equations of rectangular plates are obtained in discrete forms by applying numerical integration, and they give the transverse shear forces, twisting moment, bending moments, rotations, deflection, in-plane displacements and membrane forces at all discrete points.

As the applications of the present method, geometrical and material nonlinear problems of rectangular plates with three types of boundary conditions are calculated.

## 1. まえがき

一般に、矩形板は荷重によるたわみの増大に伴って、微小変位の線形弾性状態から、膜作用を誘発する非線形弾性状態になり、さらに、弾塑性状態に移行する。このように、大たわみが生じているときの矩形板は、弾塑性状態になっている場合が多く、幾何学的非線形と材料非線形とが複合された、いわゆる複合非線形問題となる。非線形挙動を支配する基礎方程式は非線形であり、直接それを解いて矩形板の挙動を解析することは容易ではない。

横荷重を受ける矩形板の幾何学的非線形問題に関しては、以前より多くの研究がある。Th. von Kármánの非線形基礎式に基づき、有限差分法や有限要素法を用いて解析されたもの、あるいは、あらかじめ式を近似的に仮定しておき、エネルギー法により式の係数を定める方法など、種々の方法がある。

一方、膜作用を伴う矩形板の弾塑性領域を扱ったものは、目下のところ数少ないように思われる。また、複合非線形問題での研究では、解析しやすい荷重条件と境界条件を持つ等厚板が取り扱われており、任意の荷重条件および境界条件を持つ変厚板に関する研究は、ほとんど見受けられないようである。

本論文は、既往の汎用解法の応用を避けて、基礎微分方程式の積分方程式への変換と、積分方程式の近似解法の応用とにより求められる変数係数連立偏微分方程式の、矩形板の縦横の等分割線の交点に関する離散解に基づく解法を提示し、増分理論に基づく増分法により、矩形板の複合非線形解析を行ったものである。

## 2. 増分形基礎微分方程式と離散的近似解

矩形板のせん断力を  $Q_y$ ,  $Q_x$ , ねじりモーメントを  $M_{xy}$ , 曲げモーメントを  $M_y$ ,  $M_x$ , たわみ角を  $\theta_y$ ,

平成2年10月1日受理

\*構造工学科 (Department of Structural Engineering)

$\theta x$ , たわみを  $w$  とすれば, 多軸応力状態にある矩形板の塑性状態における応力とひずみの関係式に基づいて, 横荷重のほかに板の中央面に作用する面内力  $N_{xy}$ ,  $N_y$ ,  $N_x$  を受けた場合の, せん断変形の影響を考慮した Mindlin 矩形板の弾塑性挙動を支配する基礎微分方程式は, 次の増分形式の変数係数の連立偏微分方程式で表わされる。

$$\frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} + \Delta q + \Delta N_c = 0 \quad (1. a)$$

$$\frac{\partial \Delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y} - \Delta Q_x = 0 \quad (1. b)$$

$$\frac{\partial \Delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x} - \Delta Q_y = 0 \quad (1. c)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} = \frac{1}{D} (\bar{\phi}_{11} \Delta M_x + \bar{\phi}_{12} \Delta M_y + \bar{\phi}_{13} \Delta M_{xy}) - \frac{Fh}{D} (\Phi_{11} \Delta e_x + \Phi_{12} \Delta e_y + \Phi_{13} \Delta e_{xy}) \quad (1. d)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} = \frac{1}{D} (\bar{\phi}_{21} \Delta M_x + \bar{\phi}_{22} \Delta M_y + \bar{\phi}_{23} \Delta M_{xy}) - \frac{Fh}{D} (\Phi_{21} \Delta e_x + \Phi_{22} \Delta e_y + \Phi_{23} \Delta e_{xy}) \quad (1. e)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} = \frac{1}{D} (\bar{\phi}_{31} \Delta M_x + \bar{\phi}_{32} \Delta M_y + \bar{\phi}_{33} \Delta M_{xy}) - \frac{Fh}{D} (\Phi_{31} \Delta e_x + \Phi_{32} \Delta e_y + \Phi_{33} \Delta e_{xy}) \quad (1. f)$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x = \frac{\Delta Q_x}{\kappa G h} \quad (1. g)$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y = \frac{\Delta Q_y}{\kappa G h} \quad (1. h)$$

また, 板の中央面上の  $x, y$  方向の面内変位成分を  $u, v$  とすれば, 面内力  $N_{xy}$ ,  $N_y$ ,  $N_x$  との間には次のような関係がある。

$$\frac{\partial \Delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1. i)$$

$$\frac{\partial \Delta N_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (1. j)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} = & \frac{1}{F} (\bar{\phi}_{11} \Delta N_x + \bar{\phi}_{12} \Delta N_y + \bar{\phi}_{13} \Delta N_{xy}) \\ & - h (\Psi_{11} \Delta t_x + \Psi_{12} \Delta t_y + \Psi_{13} \Delta t_{xy}) \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \end{aligned} \quad (1. k)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta v}{\partial y} = & \frac{1}{F} (\bar{\phi}_{21} \Delta N_x + \bar{\phi}_{22} \Delta N_y + \bar{\phi}_{23} \Delta N_{xy}) \\ & - h (\Psi_{21} \Delta t_x + \Psi_{22} \Delta t_y + \Psi_{23} \Delta t_{xy}) \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \quad (1. l)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} = & \frac{1}{F} (\bar{\phi}_{31} \Delta N_x + \bar{\phi}_{32} \Delta N_y + \bar{\phi}_{33} \Delta N_{xy}) \\ & - h (\Psi_{31} \Delta t_x + \Psi_{32} \Delta t_y + \Psi_{33} \Delta t_{xy}) \\ & - \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \end{aligned} \quad (1. m)$$

ここに,  $q = q(x, y)$ : 横荷重強度,  $E$ : 弾性係数,  $G = E/[2(1+\nu)]$ : せん断弾性係数,  $\nu$ : ポアソン比,  $h = h(x, y)$ : 板厚,  $\kappa = 5/6$ : せん断修正係数,  $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ : 板の曲げ剛度,  $F = Eh/(1-\nu^2)$ : 板の面内剛度,  $\Delta$ : 荷重増分  $\Delta q$  に対する各断面力および変形量の増分,

$$\begin{aligned} \Delta N_c = & \Delta N_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} \right) + \Delta N_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} \right) \\ & + 2 \Delta N_{xy} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned}$$

$\{e_x, e_y, e_{xy}\}, \{t_x, t_y, t_{xy}\}$ : Appendix I

$\bar{\phi}_{ij}, \Phi_{ij}, \bar{\psi}_{ij}, \Psi_{ij}$ : Appendix I

次の諸量,

$$\begin{aligned} X_1 = & a^2 Q_y / [D_0 (1-\nu^2)], \\ X_2 = & a^2 Q_x / [D_0 (1-\nu^2)], \\ X_3 = & a M_{xy} / [D_0 (1-\nu^2)], \\ X_4 = & a M_y / [D_0 (1-\nu^2)], \\ X_5 = & a M_x / [D_0 (1-\nu^2)], \\ X_6 = & \theta y, \quad X_7 = \theta x, \quad X_8 = w/a, \\ X_9 = & v/a, \quad X_{10} = u/a, \\ X_{11} = & a^2 N_{xy} / [D_0 (1-\nu^2)], \\ X_{12} = & a^2 N_y / [D_0 (1-\nu^2)], \\ X_{13} = & a^2 N_x / [D_0 (1-\nu^2)] \end{aligned}$$

$a, b$ : 矩形板の横縦の辺長,  $\mu = b/a$ ,  $h_0$ : 基準板厚,

$D_0 = E h_0^3 / [12(1-\nu^2)]$ : 基準板曲げ剛度

を用いて無次元化後, 矩形板の縦横の等分割線の交点に関する離散的近似解は, 次式のように整理される。

$$\begin{aligned} \Delta X_{pij} = & \sum_{d=1}^6 \left( \sum_{k=0}^i a_{pijkd} \Delta X_{rk0} + \sum_{l=0}^j b_{pijld} \Delta X_{s0l} \right) \\ & + \Delta q_{pij} \end{aligned} \quad (2. A)$$

$$\begin{aligned} \Delta X_{pij} = & \sum_{d=1}^4 \left( \sum_{k=0}^i a_{pijkd} \Delta X_{rk0} + \sum_{l=0}^j b_{pijld} \Delta X_{s0l} \right) \\ & + \Delta q_{pij} \end{aligned} \quad (2. B)$$

$a_{pijkd}, b_{pijld}, \Delta q_{pij}$ : Appendix II

この解式に含まれる境界従属点の6個ずつの諸量  $\Delta X_{rk0}$ ,  $\Delta X_{s0l}$  および4個ずつの諸量  $\Delta X_{rk0}$ ,  $\Delta X_{s0l}$  は, いわゆる積分定数であり, 境界条件によって決定されるべきものである。また任意の領域  $[i, j]$  の主要

点における諸量  $\Delta X_{pij}$  を、この領域の境界従属点における諸量  $\Delta X_{rk0}$ ,  $\Delta X_{s0l}$  および  $\Delta X_{tk0}$ ,  $\Delta X_{u0l}$  に関係づける要素  $a_{pijd}$ ,  $b_{pijd}$  は、伝達マトリックス法における格間伝達マトリックスに相当するものである。なお、離散的近似解の導入過程の詳細は、文献1)を参照されたい。

### 3. 積分定数と境界条件

基礎微分方程式 (1. a)~(1. h) および (1. i)~(1. m) の近似解 (2. A), (2. B) に含まれる積分定数  $\Delta X_{rk0}$ ,  $\Delta X_{s0l}$  および  $\Delta X_{tk0}$ ,  $\Delta X_{u0l}$  は、具体的には、それぞれ平板の  $y=0$ ,  $x=0$  なる辺上における断面力および変形を表わす。各等分割点において合計10個ずつの積分定数が存在するが、平板の境界辺の支持条件に応じて、これらの中のいずれか5個の積分定数は、はじめから既知である。残りの5個の未知なる積分定数は、 $x=a$ ,  $y=b$  の各辺の境界条件によって決定される。

Fig. 1 (1)~(3)に、各々、四辺固定板、四辺単純支持板、対辺単純支持他対辺固定板の左右および上下の2軸対称性を持つ平板の1/4部分を対象とした積分定数と境界条件を示している。各図において、隅角点における積分定数および境界条件は、 $\square$ で囲まれている。なお、隅角点における積分定数および境界条件は、その隅角点において2境界辺上での諸量間の関係を考慮して定められる。詳しくは、文献1)を参照されたい。

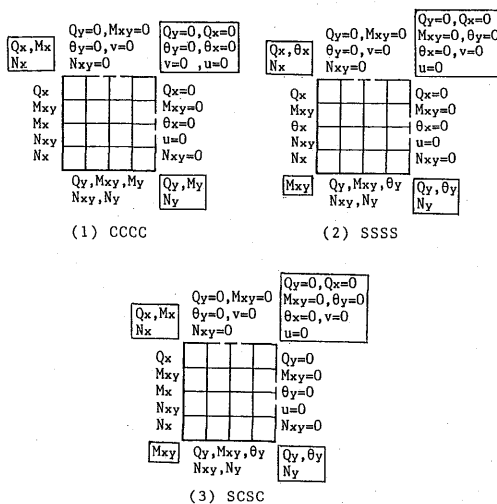


Fig. 1 Integral Constants and Boundary Conditions.

### 4. 数値計算手法

矩形板の幾何学的非線形問題では、ひずみ-変位関係式は非線形であり、また、材料非線形問題では、塑性化に伴い応力-ひずみ関係式は非線形となるため、結局、両非線形性を考慮した複合非線形問題では、増分形の変数係数の連立偏微分方程式の解を求めることに帰着される。本文で得られた増分形基礎微分方程式の離散的近似解を用いると、荷重増分法により、矩形板の複合非線形解析を行うことができる。

本文での矩形板の複合非線形解析における仮定は、次のとおりである。

- (1) 矩形板は非硬化性材料から成る。
- (2) 部材断面に降伏域が生じた後も Mindlin の理論が成り立つ。
- (3) 材料は、von-Mises の降伏条件式(3)に従う。

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2 = \sigma_p^2 \quad (3)$$

$\sigma_p$ : 降伏応力

いま、第  $n$  回目の荷重増分を与えたとすると、次の計算手順により第  $n$  回目の各断面力および変形の増分を求めることができる。

[データ] 第  $(n-1)$  荷重段階における無次元応力

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_p} = \sum \frac{\Delta \sigma_x}{\sigma_p}, \quad \frac{\sigma_y}{\sigma_p} = \sum \frac{\Delta \sigma_y}{\sigma_p}, \quad \frac{\tau_{xy}}{\sigma_p} = \sum \frac{\Delta \tau_{xy}}{\sigma_p}$$

- (a) 矩形板の断面を板厚方向に多層分割する。  
(Fig. 2 参照)

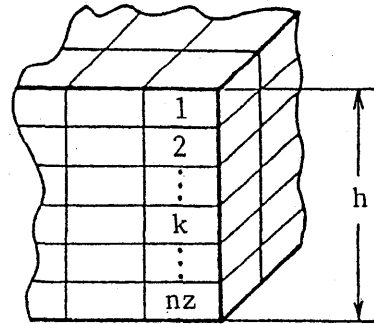


Fig. 2 Subdivision of Cross Section into Layers.

- (b) 第  $(n-1)$  荷重段階における無次元応力を用いてすべての離散点における断面のすべての要素について、偏差応力  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  を計算する。
- (c) 変数係数  $\phi_{ij}$ ,  $\bar{\phi}_{ij}$  等の計算。(Appendix I)
- (d) 不平衡力  $\Delta N_c$  を代入し、式 (1. a)~(1. h) の基礎式を解く。 $\rightarrow \Delta M_x$ ,  $\Delta M_y$ ,  $\Delta M_{xy}$  の算定
- (e)  $\partial \Delta w / \partial x$ ,  $\partial \Delta w / \partial y$  を代入し、式 (1. i)~(1. m) の基礎式を解く。

- m) の基礎式を解く。→ $\Delta N_x$ ,  $\Delta N_y$ ,  $\Delta N_{xy}$  の算定  
 (f) 第  $n$  荷重段階における無次元増分応力の算定。

$$\Delta \sigma_x / \sigma_p, \Delta \sigma_y / \sigma_p, \Delta \tau_{xy} / \sigma_p$$

- (g) 第  $n$  荷重段階における無次元応力の算定。

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_p} = \sum \frac{\Delta \sigma_x}{\sigma_p}, \quad \frac{\sigma_y}{\sigma_p} = \sum \frac{\Delta \sigma_y}{\sigma_p}, \quad \frac{\tau_{xy}}{\sigma_p} = \sum \frac{\Delta \tau_{xy}}{\sigma_p}$$

以上の(a)~(g)の計算を増分荷重下で繰り返して行く。  
 なお、(d)~(e)の計算は幾何学的非線形問題に関してであり、たわみ  $w$  が収束するまで行う。収束条件は、  
 $S-1$  回目の中央点のたわみを  $w_{c,s-1}$  とすると、

$$\frac{|w_{c,s-1} - w_{c,s}|}{w_{c,s}} < 10^{-3}$$

としている。

### 5. 数値解析結果

解析する矩形板は、降伏応力  $\sigma_p = 2500 \text{ kg/cm}^2$ 、弾性係数  $E = 2.0 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比  $\nu = 0.3$  の正方形板とし、横縦方向の分割数  $m=n=8$ 、板厚方向の分割数  $nz=20$  としている。

#### (1) 四辺固定 (CCCC) 正放形板

はじめに、四辺固定板に等分布荷重が満載される場合の複合非線形解析を行った。

Fig. 3 は、 $h/a = 0.01, 0.02, 0.03$  と変化させた場合の中央点でのたわみに関する荷重～変位曲線であり、有限変形を無視した場合の解析解も示してある。同図の  $x, y$  軸は、それぞれたわみ、荷重を有限変形を無視した同一寸法の板の弾性限でのたわみ ( $w_e$ )、荷重 ( $q_e$ ) で除してある。板厚が薄い場合では、幾何学

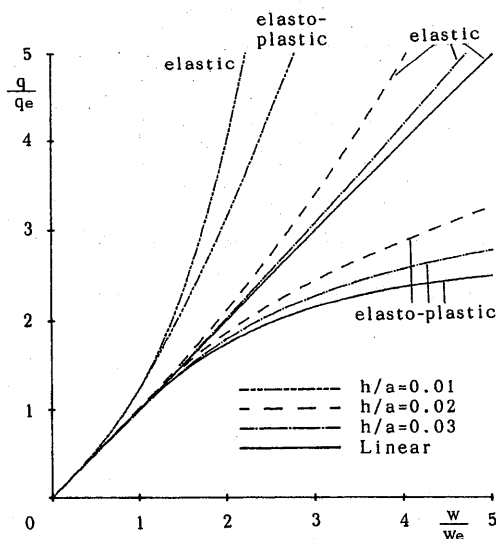


Fig. 3 Load-Deflection Curves (CCCC).

的非線形性が卓越した挙動を示し、板厚が厚い場合では、材料非線形性が卓越した挙動を示している。

Fig. 4 は、降伏開始後の代表的な荷重段階での、 $y=b/2$  上の曲げモーメント  $M_x$ 、面内力  $N_x$ 、およびたわみ  $w$  の分布を示したものである。同図より面内力  $N_x$ 、たわみ  $w$  は荷重の増加とともに増加しているのに対し、曲げモーメント  $M_x$  は塑性化とともに減少してゆく。これは、弾性域を超え塑性化した部分はもはや外力に対して抵抗せず、その近隣部分が増分荷重に対して抵抗するためであると考えられる。

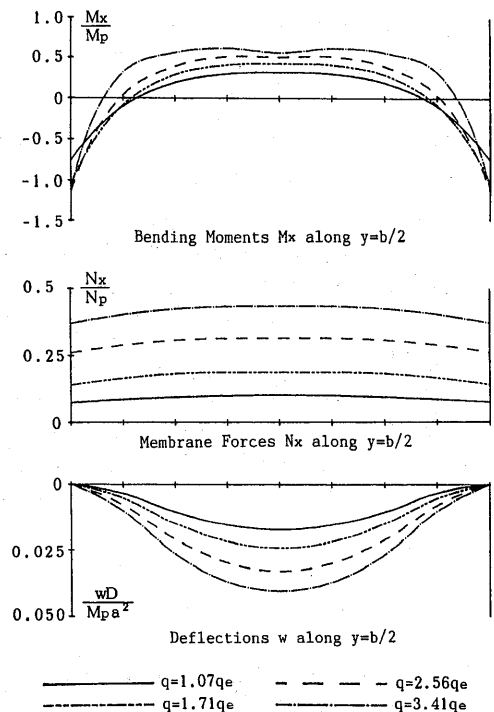


Fig. 4 Typical Bending Moment, Membrane Force and Deflection Diagrams (CCCC).

Fig. 5 は、代表的な荷重段階での板の上面、下面の塑性域進行図および板中央断面での塑性域進行図を示したものである。塑性域はまず引張側となる境界辺の中央部上面から拡がり、つづいて下面から拡がる。この段階では、面内力の影響は少なく、板の上下面ではほぼ同じ様な塑性域の進行図となる。さらに塑性域は、面内力が作用してくるため、引張側となる中央点下面からも拡がってゆくが、圧縮側となる中央点上面の塑性化は遅くなる。

これらの結果は、大賀ら<sup>2)</sup>、岡村、吉田<sup>3)</sup> および馬場、梶田、成岡<sup>4)</sup> による数値解と同様の傾向を示

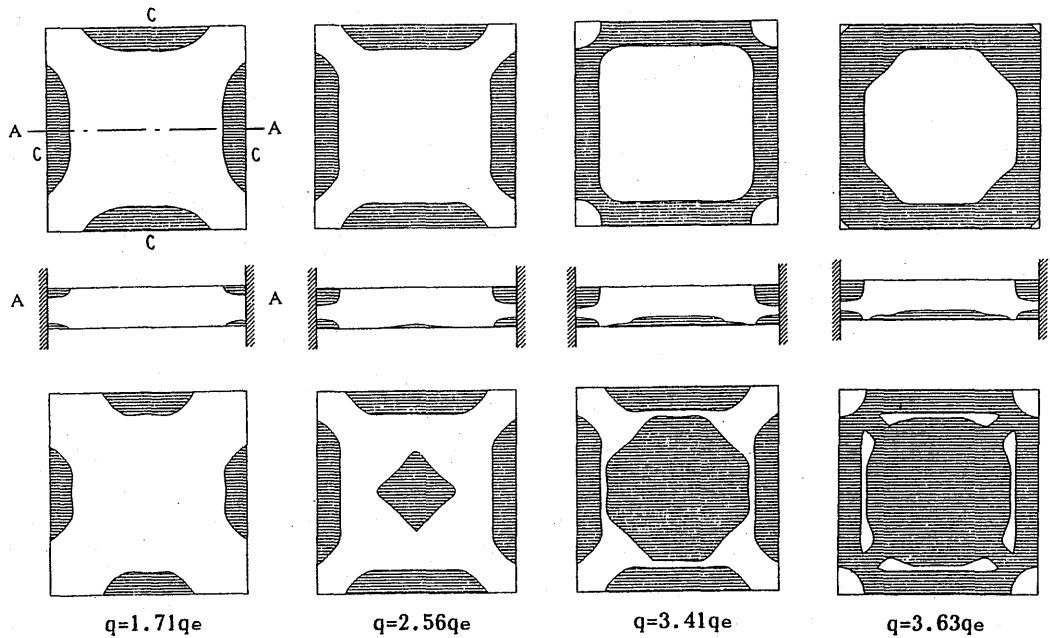


Fig. 5 Progression of Yield Regions(CCCC).

している。

なお、断面力および変位の分布図、塑性域進行図は、 $h/a=0.02$ のときは、有限変形を無視した場合と大差なく、 $h/a=0.03$ では、有限変形を無視した場合と一致しているため、 $h/a=0.01$ の場合のみを示している。以降、他の境界条件の場合も同様である。

#### (2) 四辺単純支持 (SSSS) 正方形板

つづいて、四辺単純支持板に等分布荷重が満載される場合の複合非線形解析を行った。

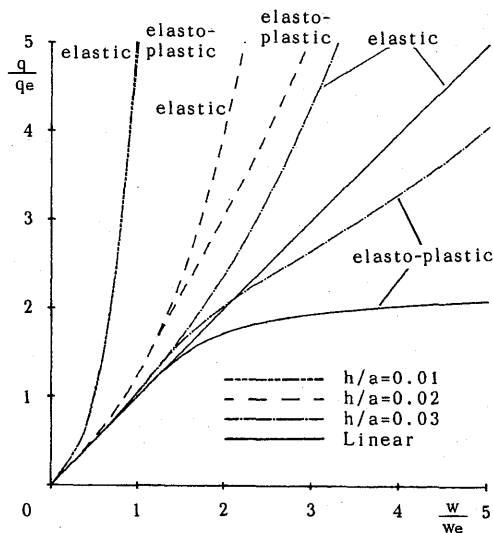


Fig. 6 Load-Deflection Curves(SSSS).

Fig. 6 は、三種類の板厚の中央点でのたわみに関する荷重～変位曲線であり、有限変形を無視した場合の解析解も示してある。板厚が薄い場合では、幾何学的

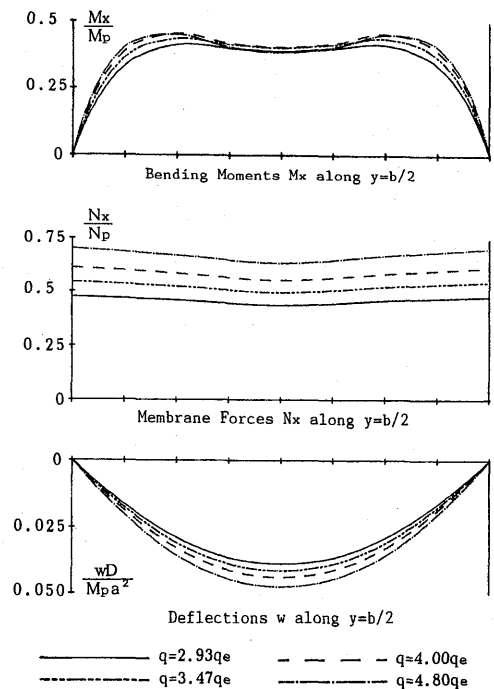


Fig. 7 Typical Bending Moment, Membrane Force and Deflection Diagrams(SSSS).

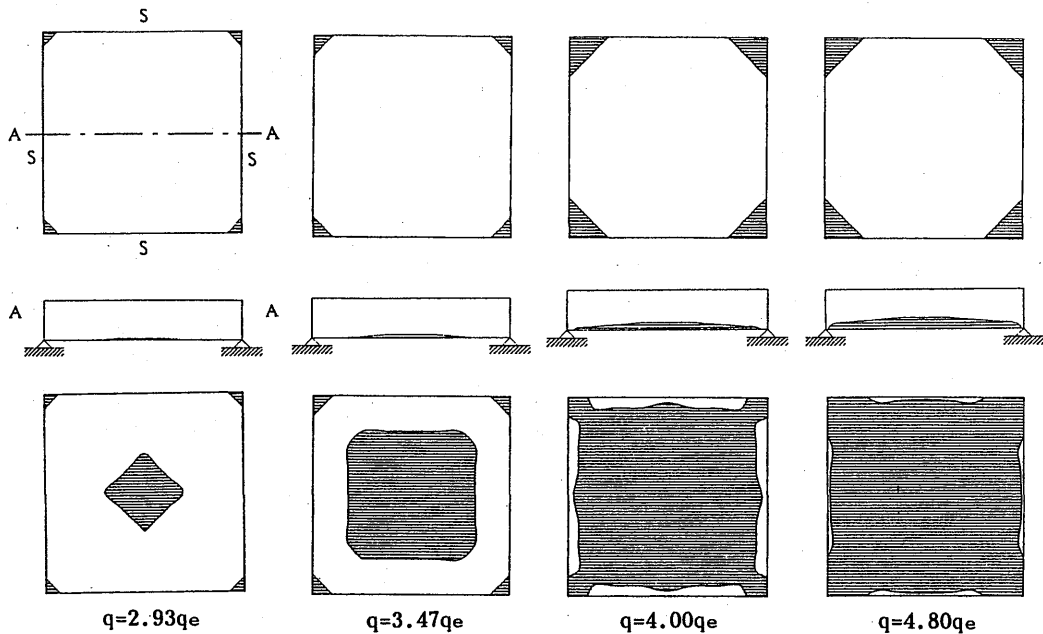


Fig. 8 Progression of Yield Regions(SSSS).

非線形性が卓越した挙動を示し、板厚が厚い場合には、材料非線形性が卓越した挙動を示している。

Fig. 7 は、降伏開始後の代表的な荷重段階での、 $y=b/2$  上の曲げモーメント  $Mx$ 、面内力  $Nx$ 、およびたわみ  $w$  の分布を示したものである。同図より面内力  $Nx$ 、たわみ  $w$  は荷重の増加とともに増加しているのに対し、曲げモーメント  $Mx$  は塑性化とともに減少してゆく。

Fig. 8 は、代表的な荷重段階での板の上面、下面の塑性域進行図および板中央断面での塑性域進行図を示したものである。塑性域はまず隅角点から拡がり、つづいて、面内力が作用するため引張側となる中央点下面からも拡がり、対角線上に進行してゆく。しかしながら、圧縮側となる中央点上面の塑性化はかなり遅くなる。有限変形を無視した場合は、かなり塑性化が進んだ段階でも境界辺の中央部に弾性域が残存するが、有限変形を考慮した場合は、面内力によってこの部分が次第に塑性化する。

これらの結果は、岡村、吉田<sup>3)</sup> および馬場、梶田、成岡<sup>4)</sup> による数値解と同様の傾向を示している。

### (3) 対辺単純支持他対辺固定 (SCSC) 正方形板

さらに、対辺単純支持他対辺固定板に等分布荷重が満載される場合の複合非線形解析を行った。

Fig. 9 は、三種類の板厚の中央点でのたわみに関する荷重～変位曲線であり、有限変形を無視した場合の

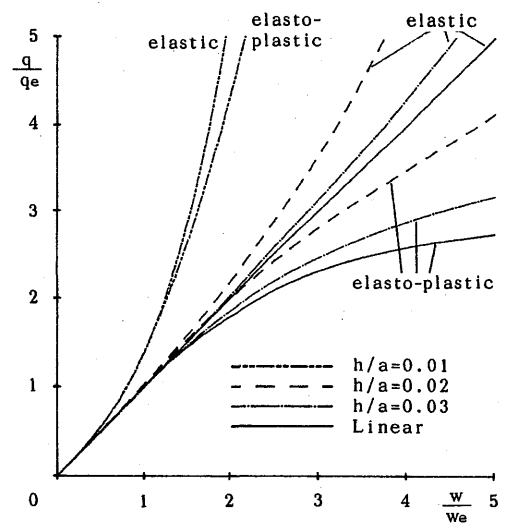


Fig. 9 Load-Deflection Curves(SCSC).

解析解も示してある。板厚が薄い場合には、幾何学的非線形性が卓越した挙動を示し、板厚が厚い場合には、材料非線形性が卓越した挙動を示している。

Fig. 10 は、降伏開始後の代表的な荷重段階での、 $y=b/2$  および  $x=a/2$  上の曲げモーメント  $Mx$ 、面内力  $Nx$ 、およびたわみ  $w$  の分布を示したものである。同図より面内力  $Nx$ 、たわみ  $w$  は荷重の増加とともに

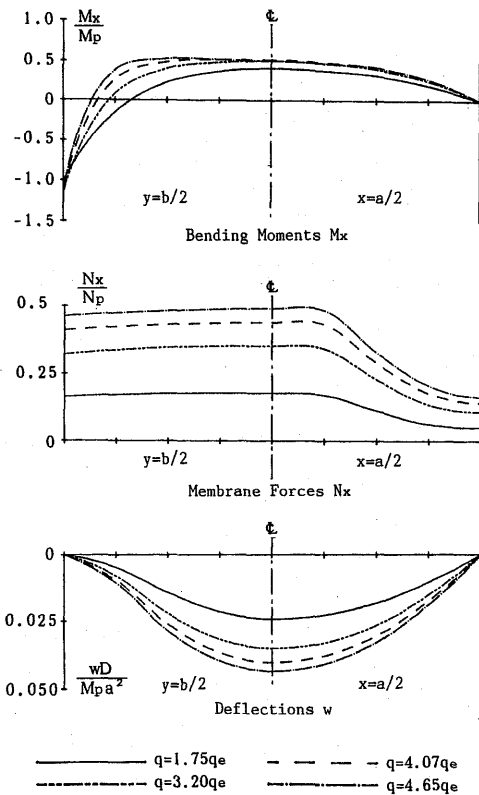


Fig.10 Typical Bending Moment, Membrane Force and Deflection Diagrams (SCSC).

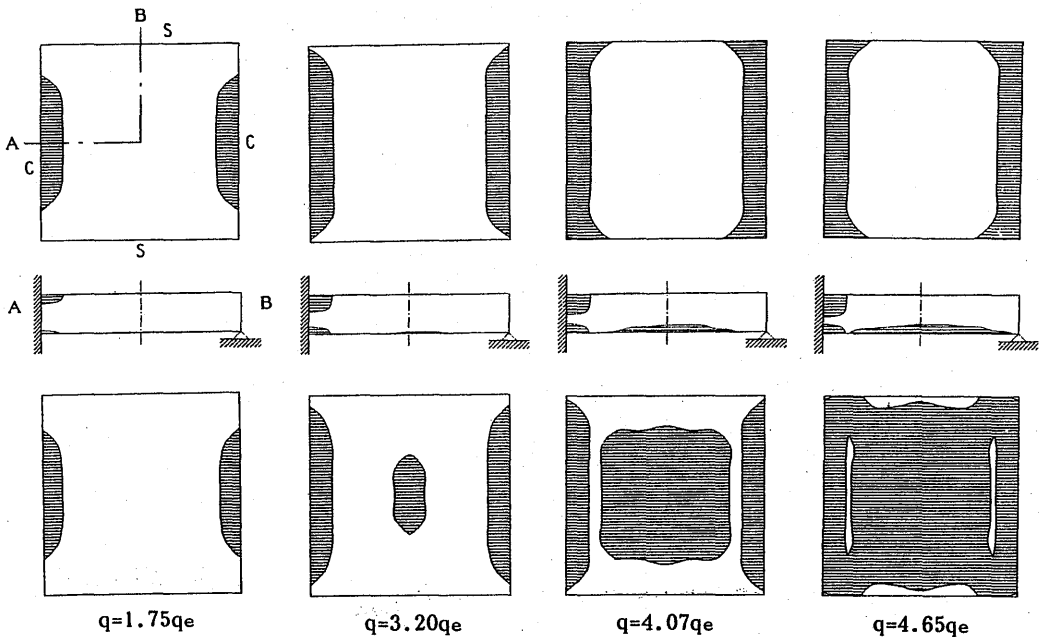


Fig.11 Progression of Yield Regions (SCSC).

増加しているのに対し、曲げモーメント  $Mx$  は塑性化とともに減少してゆく。

Fig.11は、代表的な荷重段階での板の上面、下面の塑性域進行図および板中央断面での塑性域進行図を示したものである。塑性域はまず固定辺の中央部から拡がり、つづいて、面内力が作用するため引張側となる中央点下面からも拡がり、対角線上に進行してゆく。しかしながら、圧縮側となる中央点上面の塑性化はかなり遅くなる。

## 6. 結 語

本論文は、有限変形を考慮した矩形板の、初期降伏後の弾塑性挙動を解析するための一離散化数値解法について述べたものである。有限変形を考慮した矩形板の変位-ひずみ関係、および弾塑性応力状態にある矩形板の応力-ひずみ関係により、矩形板の非線形挙動を支配する増分形の基礎微分方程式を導き、その基礎方程式に基づく直接的でかつ半解析的な矩形板の非線形問題の一解析法を提示した。本解析によると、矩形板の複合非線形問題を一般的にかつ比較的容易に解析することができる。

## [Appendix I]

$$\begin{Bmatrix} \Delta e_x \\ \Delta e_y \\ \Delta e_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta t_x \\ \Delta t_y \\ \Delta t_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Delta \theta x}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta \theta y}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta \theta x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta y}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$[\phi_{ij}] = [\phi_{ij}]^{-1}, \quad [\Phi_{ij}] = [\bar{\phi}_{ij}][\chi_{ij}]$$

$$[\bar{\phi}_{ij}] = [\phi_{ij}]^{-1}, \quad [\Psi_{ij}] = [\bar{\phi}_{ij}][\chi_{ij}]$$

$$\phi_{ij} = 12 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \alpha_{ij} \xi^2 d\xi, \quad \chi_{ij} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \alpha_{ij} \xi d\xi, \quad \bar{\phi}_{ij} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \alpha_{ij} d\xi$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{d} \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$$

$$a = \sigma_x + \nu \sigma_y, \quad b = \sigma_y + \nu \sigma_x, \quad c = (1 - \nu) \tau_{xy}$$

$$d = a\sigma_x + b\sigma_y + 2c\tau_{xy}$$

$$\sigma_x = (2\sigma_x - \sigma_y)/3\sigma_p, \quad \sigma_y = (2\sigma_y - \sigma_x)/3\sigma_p, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}/\sigma_p$$

$$\sigma_p = \text{降伏応力}$$

## [Appendix II]

$p = 1 \sim 8$  のとき

$$a_{pijkd} = \sum_{i=1}^8 \left\{ \sum_{j=0}^i \beta_{ij} A_{pi} [a_{if0kd} - a_{tjfk}(1 - \delta_{fi})] \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^j \beta_{jk} B_{pi} [a_{t0gkd} - a_{tighd}(1 - \delta_{gi})]$$

$$+ \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j \beta_{ij} \beta_{jk} C_{ptfg} a_{tjfgkd} (1 - \delta_{fi} \delta_{gi}) \}$$

$$b_{pijld} = \sum_{i=1}^8 \left\{ \sum_{j=0}^i \beta_{ij} A_{pi} [b_{if0ld} - b_{tjfld}(1 - \delta_{fi})] \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^j \beta_{jk} B_{pi} [b_{t0gld} - b_{tighld}(1 - \delta_{gi})]$$

$$+ \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j \beta_{ij} \beta_{jk} C_{ptfg} b_{tjfgld} (1 - \delta_{fi} \delta_{gi}) \}$$

$$\Delta q_{pij} = \sum_{i=1}^8 \left\{ \sum_{j=0}^i \beta_{ij} A_{pi} [\Delta q_{if0} - \Delta q_{tjfi}(1 - \delta_{fi})] \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^j \beta_{jk} B_{pi} [\Delta q_{t0g} - \Delta q_{tigh}(1 - \delta_{gi})]$$

$$+ \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j \beta_{ij} \beta_{jk} C_{ptfg} \Delta q_{tjfg} (1 - \delta_{fi} \delta_{gi}) \}$$

$$- \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j \beta_{ij} \beta_{jk} \{ A_{p1} (\Delta \bar{q}_{fg} + \Delta \bar{N} c_{fg} - \Delta \bar{R}_{fg}) + R_{pfg} \}$$

$$R_{pfg} = \gamma_{p4} R_{1fg} + \gamma_{p5} R_{2fg} + \gamma_{p6} R_{3fg}$$

$p = 9 \sim 13$  のとき

$$a_{pijkd} = \sum_{i=9}^{13} \left\{ \sum_{j=0}^i \beta_{ij} A_{pi} [a_{if0kd} - a_{tjfk}(1 - \delta_{fi})] \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^j \beta_{jk} B_{pi} [a_{t0gkd} - a_{tighd}(1 - \delta_{gi})]$$

$$+ \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j \beta_{ij} \beta_{jk} C_{ptfg} a_{tjfgkd} (1 - \delta_{fi} \delta_{gi}) \}$$

$$b_{pijld} = \sum_{i=9}^{13} \left\{ \sum_{j=0}^i \beta_{ij} A_{pi} [b_{if0ld} - b_{tjfld}(1 - \delta_{fi})] \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^j \beta_{jk} B_{pi} [b_{t0gld} - b_{tighld}(1 - \delta_{gi})]$$

$$+ \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j \beta_{ij} \beta_{jk} C_{ptfg} b_{tjfgld} (1 - \delta_{fi} \delta_{gi}) \}$$

$$\Delta q_{pij} = \sum_{i=9}^{13} \left\{ \sum_{j=0}^i \beta_{ij} A_{pi} [\Delta q_{if0} - \Delta q_{tjfi}(1 - \delta_{fi})] \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^j \beta_{jk} B_{pi} [\Delta q_{t0g} - \Delta q_{tigh}(1 - \delta_{gi})]$$

$$+ \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j \beta_{ij} \beta_{jk} C_{ptfg} \Delta q_{tjfg} (1 - \delta_{fi} \delta_{gi}) \}$$

$$- \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j \beta_{ij} \beta_{jk} S_{pfg}$$

$$S_{pfg} = \gamma_{p11} S_{1fg} + \gamma_{p12} S_{2fg} + \gamma_{p13} S_{3fg}$$

$$\Delta \bar{q} = \mu \Delta q a^3 / [D_0 (1 - \nu^2)],$$

$$\Delta \bar{N} c = \mu \Delta N c a^3 / [D_0 (1 - \nu^2)]$$

$$R_i = (12\mu a/h) (\Phi_{i1} \Delta e_x + \Phi_{i2} \Delta e_y + \Phi_{i3} \Delta e_{xy})$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

$$\Delta \bar{R} = R_1 \lambda x + R_2 \lambda y + R_3 \lambda xy$$

$$S_1 = \mu [h(\Psi_{11} \Delta t_x + \Psi_{12} \Delta t_y + \Psi_{13} \Delta t_{xy}) + (\Delta W x)^2 / 2 + W x \Delta W x]$$

$$S_2 = \mu [h(\Psi_{21} \Delta t_x + \Psi_{22} \Delta t_y + \Psi_{23} \Delta t_{xy}) + (\Delta W y)^2 / 2 + W y \Delta W y]$$

$$S_3 = \mu [h(\Psi_{31} \Delta t_x + \Psi_{32} \Delta t_y + \Psi_{33} \Delta t_{xy}) + \Delta W x \Delta W y + W x \Delta W y + W y \Delta W x]$$

$$W x = \partial w / \partial x, \quad W y = \partial w / \partial y$$

$$\begin{array}{llll} A_{p1} = \gamma_{p1} & A_{p2} = 0 & A_{p3} = \gamma_{p2} & A_{p4} = \gamma_{p3} \\ A_{p5} = 0 & A_{p6} = \gamma_{p5} & A_{p7} = \gamma_{p6} & A_{p8} = \gamma_{p8} \\ A_{p9} = \gamma_{p12} & A_{p10} = \gamma_{p13} & A_{p11} = \gamma_{p9} & A_{p12} = \gamma_{p10} \end{array}$$



$$A_{p13} = 0$$

$$B_{p1} = 0 \quad B_{p2} = \mu \gamma_{p1} \quad B_{p3} = \mu \gamma_{p3} \quad B_{p4} = 0$$

$$B_{p5} = \mu \gamma_{p2} \quad B_{p6} = \mu \gamma_{p6} \quad B_{p7} = \mu \gamma_{p4} \quad B_{p8} = \gamma_{p7}$$

$$B_{p9} = \mu \gamma_{p13} \quad B_{p10} = \mu \gamma_{p11} \quad B_{p11} = \mu \gamma_{p10} \quad B_{p12} = 0$$

$$B_{p13} = \mu \gamma_{p9}$$

$$C_{p1fg} = \mu (\gamma_{p3} + K_{fg} \gamma_{p8}) \quad C_{p2fg} = \mu \gamma_{p2} + K_{fg} \gamma_{p7}$$

$$C_{p3fg} = I_{fg} [(\gamma_{p4} - \lambda x_{fg} \gamma_{p1}) \bar{\phi}_{13fg} + (\gamma_{p5} - \lambda y_{fg} \gamma_{p1}) \bar{\phi}_{23fg} \\ + (\gamma_{p6} - \lambda x y_{fg} \gamma_{p1}) \bar{\phi}_{33fg}]$$

$$C_{p4fg} = I_{fg} [(\gamma_{p4} - \lambda x_{fg} \gamma_{p1}) \bar{\phi}_{12fg} + (\gamma_{p5} - \lambda y_{fg} \gamma_{p1}) \bar{\phi}_{22fg} \\ + (\gamma_{p6} - \lambda x y_{fg} \gamma_{p1}) \bar{\phi}_{32fg}]$$

$$C_{p5fg} = I_{fg} [(\gamma_{p4} - \lambda x_{fg} \gamma_{p1}) \bar{\phi}_{11fg} + (\gamma_{p5} - \lambda y_{fg} \gamma_{p1}) \bar{\phi}_{21fg} \\ + (\gamma_{p6} - \lambda x y_{fg} \gamma_{p1}) \bar{\phi}_{31fg}]$$

$$C_{p6fg} = -\mu \gamma_{p8} \quad C_{p7fg} = -\gamma_{p7} \quad C_{p8fg} = 0$$

$$C_{p9fg} = 0 \quad C_{p10fg} = 0$$

$$C_{p11fg} = L_{fg} (\gamma_{p11} \bar{\phi}_{13fg} + \gamma_{p12} \bar{\phi}_{23fg} + \gamma_{p13} \bar{\phi}_{33fg})$$

$$C_{p12fg} = L_{fg} (\gamma_{p11} \bar{\phi}_{12fg} + \gamma_{p12} \bar{\phi}_{22fg} + \gamma_{p13} \bar{\phi}_{32fg})$$

$$C_{p13fg} = L_{fg} (\gamma_{p11} \bar{\phi}_{11fg} + \gamma_{p12} \bar{\phi}_{21fg} + \gamma_{p13} \bar{\phi}_{31fg})$$

$$[\gamma_{pt}] = [\rho_{tp}]^{-1}$$

$$(p = 1 \sim 8, t = 1 \sim 8 \text{ or } p = 9 \sim 13, t = 9 \sim 13)$$

$$\rho_{11} = \beta_{ii} \quad \rho_{12} = \mu \beta_{jj}$$

$$\rho_{13} = \beta_{ij} I_{ij} (\bar{\phi}_{13ij} \lambda x_{ij} + \bar{\phi}_{23ij} \lambda y_{ij} + \bar{\phi}_{33ij} \lambda x y_{ij})$$

$$\rho_{14} = \beta_{ij} I_{ij} (\bar{\phi}_{12ij} \lambda x_{ij} + \bar{\phi}_{22ij} \lambda y_{ij} + \bar{\phi}_{32ij} \lambda x y_{ij})$$

$$\rho_{15} = \beta_{ij} I_{ij} (\bar{\phi}_{11ij} \lambda x_{ij} + \bar{\phi}_{21ij} \lambda y_{ij} + \bar{\phi}_{31ij} \lambda x y_{ij})$$

$$\rho_{22} = -\mu \beta_{ij} \quad \rho_{23} = \beta_{ii} \quad \rho_{25} = \mu \beta_{jj} \quad \rho_{31} = -\mu \beta_{ij}$$

$$\rho_{33} = \mu \beta_{jj} \quad \rho_{34} = \beta_{ii} \quad \rho_{43} = -\beta_{ij} I_{ij} \bar{\phi}_{13ij} \quad \rho_{44} = -\beta_{ij} I_{ij} \bar{\phi}_{12ij}$$

$$\rho_{45} = -\beta_{ij} I_{ij} \bar{\phi}_{11ij} \quad \rho_{47} = \mu \beta_{jj} \quad \rho_{53} = -\beta_{ij} I_{ij} \bar{\phi}_{23ij}$$

$$\rho_{54} = -\beta_{ij} I_{ij} \bar{\phi}_{22ij} \quad \rho_{55} = -\beta_{ij} I_{ij} \bar{\phi}_{21ij} \quad \rho_{56} = \beta_{ii}$$

$$\rho_{63} = -\beta_{ij} I_{ij} \bar{\phi}_{33ij} \quad \rho_{64} = -\beta_{ij} I_{ij} \bar{\phi}_{32ij} \quad \rho_{65} = -\beta_{ij} I_{ij} \bar{\phi}_{31ij}$$

$$\rho_{66} = \mu \beta_{jj} \quad \rho_{67} = \beta_{ii} \quad \rho_{72} = -\beta_{ij} K_{ij} \quad \rho_{77} = \beta_{ij}$$

$$\rho_{78} = \beta_{jj} \quad \rho_{81} = -\mu \beta_{ij} K_{ij} \quad \rho_{86} = \mu \beta_{ij} \quad \rho_{88} = \beta_{ii}$$

$$\rho_{911} = \beta_{ii} \quad \rho_{913} = \mu \beta_{jj} \quad \rho_{1011} = \mu \beta_{jj} \quad \rho_{1012} = \beta_{ii}$$

$$\rho_{1110} = \mu \beta_{jj} \quad \rho_{1111} = -\beta_{ij} L_{ij} \bar{\phi}_{13ij} \quad \rho_{1112} = -\beta_{ij} L_{ij} \bar{\phi}_{12ij}$$

$$\rho_{1113} = -\beta_{ij} L_{ij} \bar{\phi}_{11ij} \quad \rho_{129} = \beta_{ii} \quad \rho_{1211} = -\beta_{ij} L_{ij} \bar{\phi}_{23ij}$$

$$\rho_{1212} = -\beta_{ij} L_{ij} \bar{\phi}_{22ij} \quad \rho_{1213} = -\beta_{ij} L_{ij} \bar{\phi}_{21ij} \quad \rho_{139} = \mu \beta_{jj}$$

$$\rho_{1311} = -\beta_{ij} L_{ij} \bar{\phi}_{33ij} \quad \rho_{1312} = -\beta_{ij} L_{ij} \bar{\phi}_{32ij}$$

$$\rho_{1313} = -\beta_{ij} L_{ij} \bar{\phi}_{31ij}$$

$$\beta_{ij} = \beta_{ii} \beta_{jj}$$

$$I_{ij} = \mu (1 - \nu^2) (h_0/h_{ij})^3, \quad K_{ij} = E h_0^3 / (12 \kappa G a^2 h_{ij}),$$

$$L_{ij} = (1 - \nu^2) h_0^3 / (12 a^2 h_{ij}),$$

$$\lambda x = -N x a^2 / [D_0 (1 - \nu^2)],$$

$$\lambda y = -N y a^2 / [D_0 (1 - \nu^2)],$$

$$\lambda x y = -N x y a^2 / [D_0 (1 - \nu^2)]$$

### 参考文献

- 1) 崎山毅・松田浩：変厚矩形板の曲げの一解析法，土木学会論文報告集，第338号，pp.21-28，1983.
- 2) Ohga, M., T. Shigematsu and T. Hara: A Combined Finite Element-Transfer Matrix Method. Proc. ASCE, Vol. 110 EM9, pp.1335-1349.
- 3) 岡村宏一・吉田公憲：大たわみ，および，リブの補鋼を考慮した長方形鋼板の弾塑性解析，土木学会論文報告集，第196号，pp.29-43，1971.
- 4) 馬場俊介・梶田建夫・成岡昌夫：差分表示を用いた非線形解析，土木学会論文報告集，第256号，pp.11-20，1976.
- 5) 松田浩・崎山毅：矩形板の非弾性曲げの一解析法，構造工学論文集，Vol.33A，pp.257-264，1987.
- 6) 山田義昭：マトリックス法材料力学，日本鋼構造協会編，培風館.